ADAKAH SEGITIGA YANG JUMLAH SUDUTNYA KURANG DARI 180^0?

(Sebuah kajian dari Geometri Non Euclid)

Mujiasih, S.Pd., M.Pd

ABSTRAK

Geometri yang diajarkan di sekolah/madrasah, bahkan di perguruan tinggi umumnya merupakan geometri yang dikenal dengan nama Geometri Euclidus. Ciri khas geometri ini, ditandai dengan rumus yang amat terkenal yaitu bahwa: Jumlah sudut dalam setiap segitga adalah 180^0. Sampai pada akhirnya muncullah Geometri yang "berbeda" dengan geometri yang yang sudah ada. Salah satunya, adalah Geometri yan diketemukan oleh Lobachevsky. Geometri ini dikenal dengan nama Geometri Lobachevsky atau Geometri Hiperbolik. Dalam Geometri Lobachevsky, dapat dibuktikan bahwa jumlah sudut dalam setiap segitiga kurang (lebih kecil) dari 180^0.

Kata kunci: Geometri Lobachevsky, Geometri Hiperbolik

PENDAHULUAN

Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793 – 1856) adalah seorang profesor matematika yang mengajar di Universitas Kazan. Lobachevsky bersama dengan Gauss dan Bolyai merupakan tokoh-tokoh yang mengenalkan Geometri Non Euclid. Untuk menghormatinya, maka geometri yang dikenalkannya disebut dengan Geometri Lobachevsky atau Geometri Hiperbolik. Selain Lobachevsky, ada tokoh lain yang menemukan Geometri Non Euclid yang berbeda dengan Lobachevsky, yakni Riemann dan geometri temuan Riemann disebut juga dengan Geometri Eliptik.

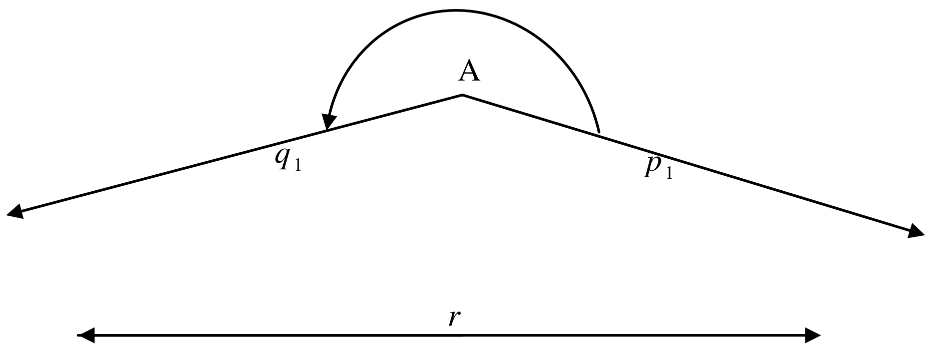
Geometri Lobachevsky dapat dikarakteristikkan sebagai salah satu tipe Geometri Netral. Jadi, teorema-teorema Geometri Netral berlaku untuk Geometri Lobachevsky sehingga teorema-teorema Geometri Netral banyak digunakan dalam pembuktian teorema-teorema Geometri Lobachevsky. Oleh karena itu, penguasaan terhadap materi Geometri Netral sebenarnya merupakan prasyarat dalam mempelajari Geometri Lobachevsky.

Postulat Kesejajaran Lobachevsky

Untuk memulai pembahasan tentang Geometri Lobachevsky, perlu diberikan terlebih dahulu sebuah postulat kesejajaran Geometri Lobachevsky ini.

Postulat tersebut adalah sebagai berikut.

Ada paling sedikit dua garis lurus yang sejajar dengan suatu garis tertentu, di mana kedua garis tadi melalui sebuah titik di luar garis tertentu tersebut.



Gb. 1

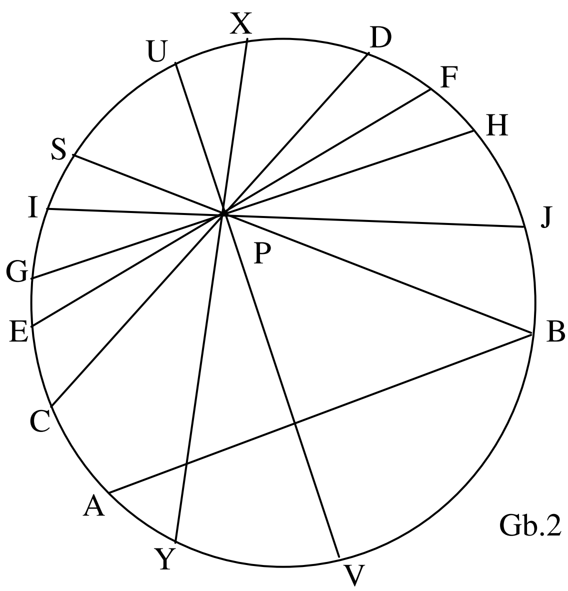
Gagasan Lobachevsky, Gauss, dan Bolyai adalah sebagai berikut. Perhatikan Gb. 1 di atas. Diketahui sebuah garis *r* dan sebuah titik A di luar garis *r*.

p_1 adalah sinar garis pertama yang tidak memotong garis *r* pada arah kanan. Terlihat bahwa sinar-sinar tersebut bergerak berlawanan dengan arah perputaran jarum jam. Maka, q_1 adalah sinar garis terakhir yang tidak memotong garis *r* pada arah kiri. Sinar-sinar p_1 dan q_1 disebut sebagai sinar-sinar garis yang sejajar dengan garis *r* (Gb. 1).

Menurut Lobachevsky, Gauss, dan Bolyai, dua garis dikatakan sejajar jika keduanya *hampir* berpotongan.

Ilustrasi.

Perhatikan gambar Gb. 2 berikutini.



Gb.2

AB adalah sebuah tali busur. P adalah sebuah titik di dalam lingkaran dan berada di luar AB. Kita buat tali-tali busur lainnya yang melalui P dan tidak memotong AB.

Pada gambar, tali-tali busur CD, EF, GH, dan IJ tidak memotong AB. Sedangkan tali busur UV, SB, XY berpotongan dengan AB.

Dengan demikian, dikatakan bahwa CD, EF, GH, dan IJ sejajar dengan AB.

Jelasnya, Geometri Lobachevsky dikembangkan dari dari Geometri Netral. Oleh karena itu, Geometri Lobachevsky merupakan salah satu tipe Geometri Netral. Dalamhalini, teorema-teorema Geometri Netral berlaku untuk Geometri Lobachevsky dan akan digunakan dalam pembuktian-pembuktiannya. Dalam tulisan ini, GeometriNetral tidak dibahas.

Teorema Non Metrik

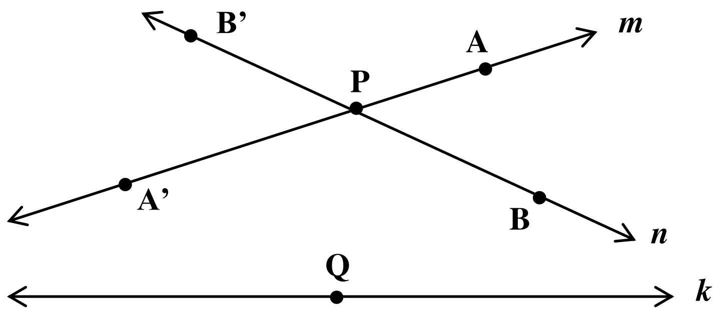
Untuk membuktikan bahwa dalam Geometri Lobachevsky berlaku: jumlah sudut dalam setiap segitiga lebih kecil dari 180^0, maka berikut ini akan dikaji terlebih dahulu urutan teorema-teorema pendukungnya.

Teorema non metrik Geometri Lobachevsky (Teorema 1), merupakan suatu teorema dasar yang tidak melibatkan ide-ide metrik seperti jarak, ketegaklurusan, ataupun luasan. Karena itu, maka teorema dasar ini disebut dengan Teorema Non Metrik.

Teorema 1

Sebarang garis berada seluruhnya dalam interior suatu sudut.

Bukti:



Gb. 3

- Misalkan *k* adalah suatu garis. Pilih titik *P*,di luar garis *k*.
- Berdasarkan postulat kesejajaran Lobachevsky, ada paling sedikit dua garis *m* dan *n* yang berbeda, yang melalui *P* dan sejajar *k*.
- Garis-garis *m* dan *n* memisahkan bidang menjadi 4 daerah, yang masing-masing daerah merupakan **interior** dari sudut di titik *P*.
- Perhatikan gambar 3 di atas.

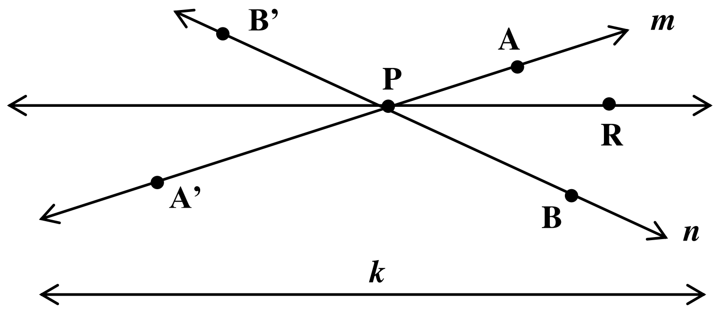
  Misalkan daerah-daerah ini sebagai interior $\angle APB$, $\angle APB'$, $\angle A'PB$, dan $\angle A'PB'$. Dalam hal ini, pada garis *m* titik *P* terletak di antara *A* dan *A*', sedangkan pada garis *n,* titik *P* terletak di antara *B* dan *B*'.
- Misalkan *Q* adalah sebarang titik pada garis *k.* Karena *k* tidak memotong *m* atau *n* maka *Q* tidak terletak pada *m* atau *n*, sehingga *Q* berada dalam salah satu interior. Misalkan *Q* terletak pada interior $\angle A'PB$. Persoalannya, di manakah *k* berada?

☞ Karena sebarang titik *Q* berada dalam interior ∠*A'PB* dan karena *k* tidak memotong sisi *PA'* maupun *PB*, maka *k* terletak dalam interior ∠*A'PB*.

Akibat Teorema 1.

Terdapat tak berhingga banyaknya garis-garis sejajar terhadap sebuah garis tertentu, yang dapat dibuat melalui sebuah titik tertentu di luar garis tertentu tadi.

Bukti:



Gb. 4

Perhatikan gambar 4 diatas.

☞ Misalkan *k* adalah garis yang diketahui dan *P* adalah titik di luar *k* yang diketahui pula.

☞ Berdasarkan postulat kesejajaran Lobachevsky, ada paling sedikit dua garis *m* dan *n* yang berbeda, yang melalui *P* dan sejajar *k*.

☞ Misalkan pada garis *m*, titik *P* terletak di antara *A* dan *A*', sedangkan pada garis *n*, titik *P* terletak di antara *B* dan *B*'.
(lihat gambar di atas). Sehingga diperoleh interior ∠*APB,* ∠*APB'*,
∠*A'PB*, dan ∠*A'PB*'.

☞ Karena *k* tidak memotong *PA'* maupun *PB* maka menurut teorema 1, garis *k* seluruhnya terletak dalam interior ∠*A'PB*.

☞ Tentukan sebarang titik *R* pada interior dari ∠*APB*. Dengan demikian garis *PR* termuat seluruhnya dalam interior ∠*APB* dan ∠*A'PB'*serta tidak akan bertemu *k* yang berbeda dalam interior ∠*A'PB*.
Jadi *PR* sejajar *k*.

☞ Karena titik *R* diambil sebarang, maka berakibat ada garis-garis *PR* yang banyaknya tak terhingga.

Dua Segitiga yang Jumlah Sudut-sudutnya Berbeda.
Jumlah Sudut-sudut Segitiga dalam Geometri Lobachevsky

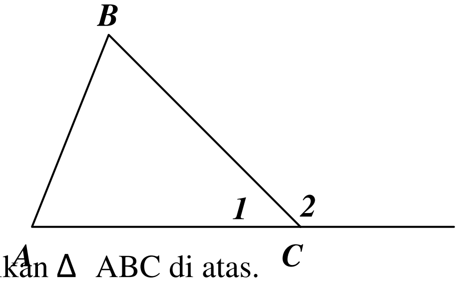
Teorema 1 menunjukkan bagaimana kedudukan atau sifat-sifat non metrik dalam Geometri Lobachevsky berbeda dengan pemikiran-pemikiran Euclides. Teorema 2 di bawah ini, akan menunjukkan jumlah sudut-sudut dalam segitiga yang terjadi, karena adanya perubahan postulat kesejajaran.

Sebelumnya akan dibahas 2 lemma berikut ini.

Lemma 1

Jumlah dua sudut suatu segitiga kurang dari atau sama dengan besar sudut luar yang tidak bersisian dengan keduanya.

Bukti:



Perhatikan Δ ABC di atas.

Akan dibuktikan $\angle A + \angle B \leq \angle C_2$

Berdasarkan teorema Saccheri-Legendre (Teorema 1 Geometri Netral) diperoleh:

$\angle A + \angle B + \angle C_1 \leq 180^o$...(1)

$\angle C_2$ suplemen $\angle C_1$, sehingga $\angle C_1 + \angle C_2 = 180^o$

$\angle C_1 = 180^o - \angle C_2$...(2)

Dari (1) dan (2) diperoleh:

$\angle A + \angle B + 180^o - \angle C_2 \leq 180^o$

$\angle A + \angle B \leq \angle C_2$.

<u>*Catatan*</u>

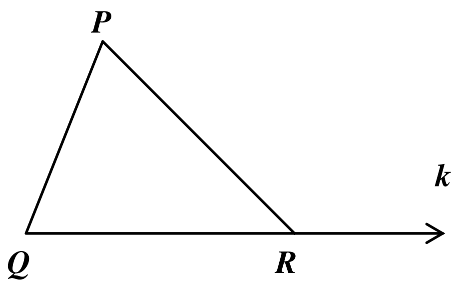
$\angle A + \angle B$ adalah jumlah dua sudut ΔABC.

$\angle C_2$ adalah sudut luar yang tidak bersisian dengan $\angle A$ dan $\angle B$.

Lemma 2

Misalkan *k* suatu garis, *P* suatu titik yang tidak terletak pada garis *k*, dan *Q* suatu titik pada *k*. Misalkan dibuat sisi *PQ*, maka terdapat sebuah titik *R* pada garis *k* di sebelah kanan sisi *PQ*, sedemikian hingga $\angle PRQ$ sekecil yang diinginkan.

Bukti:



☞ Misalkan a adalah sebarang sudut (tidak dipersoalkan bagaimana kecilnya),

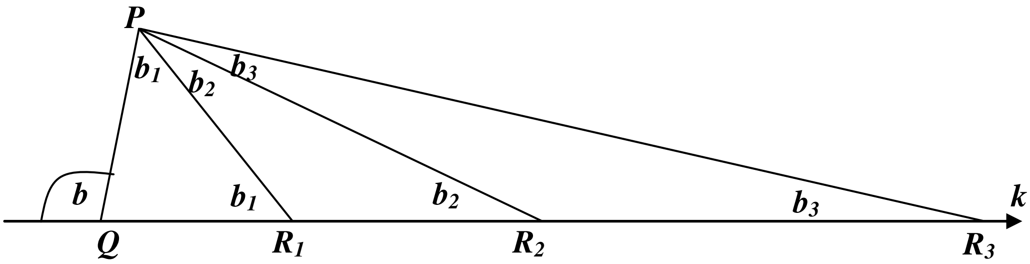
☞ Akan ditunjukkan bahwa terdapat titik R pada k, di sebelah kanan sisi PQ sedemikian hingga $\angle PRQ < a$.

☞ Kita susun barisan sudut:

$\angle PR_1Q,\ \ \angle PR_2Q,\ \ \angle PR_3Q,...$

Setiap sudut tidak lebih besar dari setengah sudut yang mendahuluinya.

Perhatikan gambar dibawah ini.



Misalkan R_1 adalah titik pada k, di kanan sisi PQ sedemikian hingga $\overline{QR_1} = \overline{PQ}$.

Tarik garis $\overline{PR_1}$, maka ΔPQR_1 sama kaki dan

$$\angle QPR_1 = \angle PR_1Q = b_1$$

Misalkan b adalah sudut luar dari ΔPQR_1 pada titik sudut Q.

Berdasarkan Lemma 1, diperoleh:

$$b_1 + b_1 = 2b_1 \le b$$

Sehingga:

$$b_1 \le \frac{1}{2}b \text{...(1)}$$

Selanjutnya dibuat lagi $\overline{R_1R_2} = \overline{PR_1}$, maka ΔPR_1R_2 sama kaki.

Akibatnya: $\angle R_1PR_2 = \angle R_1R_2P = \angle PR_2Q = b_2$.

Berdasarkan lemma 1 maka:

$$\angle R_1PR_2 + \angle R_1R_2P \le b_1$$

$$b_2 + b_2 \le b_1$$

$$b_2 \le \frac{1}{2}b_1$$

Dengan menggunakan (1) diperoleh:

$$b_2 \le \frac{1}{2}b_1 \le \frac{1}{2}.\frac{1}{2}b = \frac{1}{2^2}b$$

Bila proses di atas diulangi sebanyak n kali, maka diperoleh titik R_n pada *k*, di sebelah kanan sisi $\overline{PQ}$ sedemikian hingga:

$$b_n = \angle PR_nQ \leq \frac{1}{2^n} b$$

Pilih n cukup besar, maka $\frac{1}{2^n} b$ semakin kecil, sehingga:

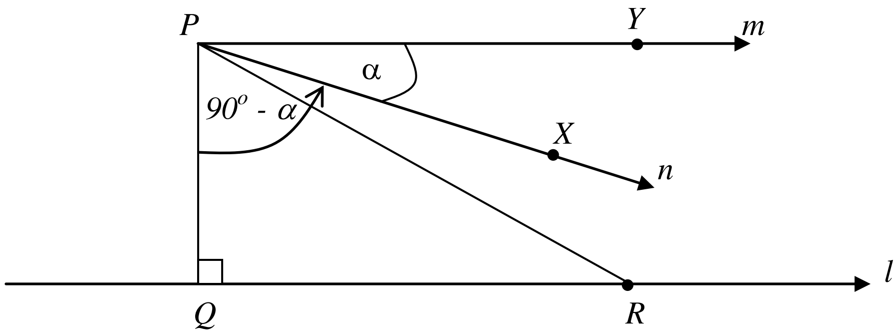
$$\frac{1}{2^n} b < a, \; a = \text{sudut kecil yang diketahui.}$$

Dengan mengambil $R = R_n$, maka lemma 2 di atas dipenuhi/terbukti.

Teorema 2

Ada sebuah segitiga yang jumlah sudut-sudutnya kurang dari 180^o.

Bukti:



- Misalnya ditentukan garis *l* dan titik *P* di luar garis *l*. Diperoleh garis *m* yang melalui *P* dan sejajar *l*. Misalkan *PQ* tegak lurus *l* di *Q* dan tegak lurus *m* di *P*.
- Menurut postulat kesejajaran Lobachevsky, ada garis lain *n* yang melalui *P* sejajar *l*. Salah satu sudut yang dibentuk *n* dengan *PQ* adalah lancip.
- Ambil titik *X* pada *n* sehingga $\angle QPX$ lancip.

  Ambil titik *Y* pada *m* sehingga $\angle XPY = a$ maka $\angle QPX = 90^O - a$.
- Berdasarkan lemma 2, ambil titik *R* pada *l* yang sepihak dengan *X* terhadap *PQ* sehingga $\angle PRQ < a$.

  Perhatikan ΔPQR:

$$\angle PQR = 90^O$$
$$\angle QRP < a$$
$$\angle RPQ < 90^O - a \quad +$$
$$\overline{\angle PQR + \angle QRP + \angle RPQ < 180^O}.$$

Teorema 3

Jumlah sudut-sudut setiap segitiga kurang dari 180^o.

Bukti:

- **Akibat 2 teorema 6** dalam Geometri Netral (tidak dibahas dalam tulisan ini):

  Jika ada sebuah segitiga yang jumlah sudutnya kurang dari 180^o maka setiap segitiga jumlah sudut-sudutnya kurang dari 180^o ....(1)
- Teorema 2 Geometri Lobachevsky yang mengatakan:

  ”Ada sebuah segitiga yang jumlah sudutnya kurang dari 180^o ....(2)

  Berdasarkan (1) dan (2) maka jumlah sudut setiap segitiga kurang dari 180^o.

Dengan demikian, terbukti: Dalam Geometri Lobachevsky berlaku bahwa jumlah sudut dalam setiap segitiga lebih kecil dari 180^0.

Akibat Sampingan

Berdasarkan Teorema 3 di atas, maka muncul akibat sampingan, yang dikenal dengan istilah Teorema Akibat (*Corrolary*).

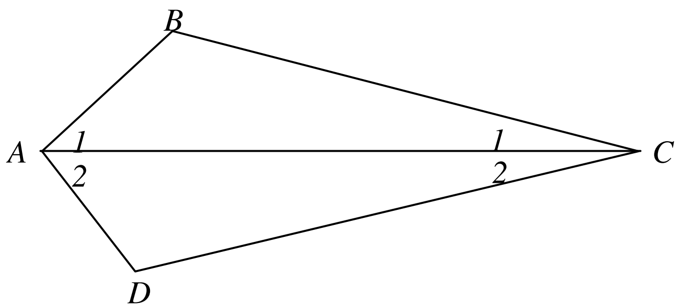
Akibat dari Teorema 3:

Akibat 1.

Jumlah sudut-sudut setiap segiempat kurang dari 360^o.

Bukti:

- Perhatikan gambar dibawah ini.



Akandibuktikan bahwa bahwa $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D < 360^o$.

- Hubungkan titik *A* dan *C*
- Menurut teorema 3 maka:

  $\angle A_1 + \angle B + \angle C_1 < 180^o$

$\angle A_2 + \angle D + \angle C_2 < 180^o$

- Sehingga diperoleh:

$$\angle A_1 + \angle B + \angle C_1 < 180^o$$

$$\underline{\angle A_2 + \angle D + \angle C_2 < 180^o \qquad +}$$

$$\angle A_1 + A_2 + \angle B + \angle D + \angle C_1 + \angle C_2 < 360^o$$

Jadi $\angle A + \angle B + \angle D + \angle C < 360^o$.

Akibat 2.

Tidak ada persegi panjang.

Bukti:

Pada definisi persegi panjang dalam geometri netral mengatakan:
Suatu segiempat disebut persegi panjang apabila setiap sudutnya adalah sudut siku-siku.

Hal ini berarti bahwa jumlah sudut-sudut segiempat harus sama dengan 360^o. Bertentangan dengan akibat 1.
Jadi tidak ada persegi panjang

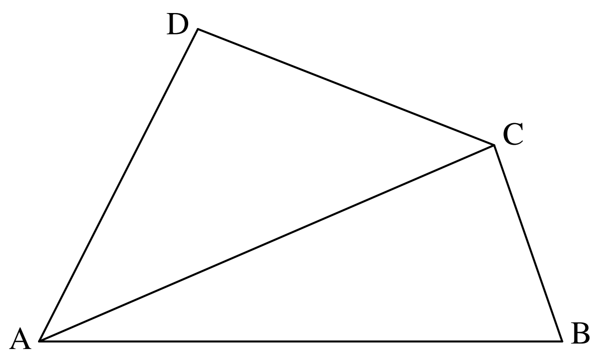
Konsekuensi logis dari seluruh postulat dan teorema di atas dapat digunakan untuk membuktikan bahwa ada dua segitiga yang jumlah besar sudut-sudutnya berbeda.

Contoh soal:

Buktikan bahwa ada dua segitiga yang jumlah sudut-sudutnya berbeda.

Bukti:

Perhatikan gambar berikut:



Misalkan jumlah sudut-sudut $\Delta ABC = a$

jumlah besar sudut-sudut $\Delta ACD = b$

$a + b < 360^o$ (Akibat 1 teorema 3)

$a < 360^o - b$

Misalkan $b < 180^o$, maka:

$a = 180^o$ atau $a < 180^o$ atau $a > 180^o$.

Dalam hal ini $a = 180^o$ dan $a > 180^o$ tak mungkin terjadi, karena bertentangan dengan teorema 3.

Jadi, $a < 180^o$ dan $b < 180^o$. Akibatnya, diperoleh 3 kemungkinan nilai, yaitu:

$a = b$ atau $a < b$ atau $a > b$.

Jadi, bila $a < b$ atau $a > b$ maka ada dua segitiga yang jumlah sudut-sudutnya berbeda.

KESIMPULAN

Dari uraian di atas, maka dapat ditarik beberapa kesimpulan.

1. Terbukti bahwa dalam Geometri Lobachevsky berlaku bahwa jumlah sudut dalam setiap segitiga lebih kecil dari 180^0.
2. Menurut Lobachevsky, Gauss, dan Bolyai, dua garis dikatakan sejajar jika keduanya *hampir* berpotongan.
3. Dalam Geometri Lobachevsky, didak dijumpai adanya Persegi panjang.

DAFTAR PUSTAKA

De Ban, M.A dan Bos, J.C. 1974. *Ilmu Ukur* (diterjemahkan oleh Sutedja). Jakarta: PT. Pradnya Paramita.

Hall, H.S dan Stevens, F.H. 1919. *A School Geometry*. London: Macmillan and Co, Limited.

Haroll, E Wolfe. 1945. *Non Euclidean Geometry.* New York: Rinehart and Winston Inc.

Muharti, Hw. 1986. *Sistem-sistem Geometri.* Jakarta: Universitas Terbuka (UT).

Ray Hemmings. 1985. *Majalah "Mathematics Teaching" June 1985 – Lobachevsky on Micro.* Australia.

Rawuh. 1994. *Geometri.* Jakarta: Universitas Terbuka (UT).

Soemadi, H. 2000. *Sistem Geometri.* Surabaya: Jurusan Matematika FMIPA Unesa.

Taskin, Gafur dan Kirikci, Mustafa. 2005. *Pre-Geometry.* Istanbul: Zambak Publishing.

Prenowitz, Walter. 1985. *Basic Concept of Geometry.* London: Blaisdell Publishing Company.